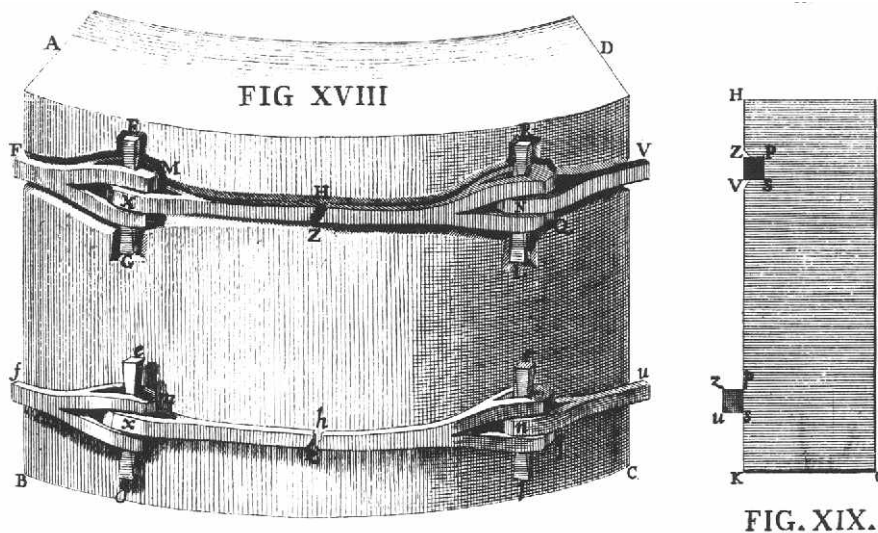


## Inhaltsverzeichnis Teil 2

	<b>Seite</b>
<b>Zu 5.2 Teil 1 S. 41 (XX.): Konstruktive Ausbildung der Eisenketten</b>	<b>2</b>
<b>Zu 6.1 Teil 1 S. 51 (XXV.): Belastung</b>	<b>3</b>
<b>Zu 6.2 Teil 1 S. 53 (XXVI.): Zugkraft der Eisenketten</b>	<b>4</b>
<b>Zu 6.3 Teil 1 S. 53 (XXVI.): Vergleich Kreis mit Stab</b>	<b>6</b>
<b>Zu 6.4: Teil 1 S. 55 (XXVII.): Virtuelle Verrückungen</b>	<b>7</b>
<b>Zu 6.5: Teil 1 S. 57 (XXVIII.): Einfachheit der Zahlenrechnung</b>	<b>7</b>
<b>Zu 6.6 Teil 1 S. 57 (XXVIII.): Darstellung von 2 Berechnungsvarianten: Ohne und mit Schäden</b>	<b>8</b>
<b>Zu 6.7 Teil 1 S. 57 (XXVIII.): Berechnungsvariante ohne Schäden (Hypothese); (siehe auch Skizze 1)</b>	<b>9</b>
<b>Zu 6.8 Teil 1 S. 59 (XXIX.): Berechnungsvariante mit Schäden (siehe auch Skizze 2)</b>	<b>10</b>
<b>Zu 6.9 Teil 1 S. 61 (XXX.): Diskussion der Berechnungsergebnisse</b>	<b>12</b>
<b>Zu 7 Teil 1 S. 63 (XXXI.): Instandsetzungsvorschläge</b>	<b>13</b>
<b>Zu 7.1 Teil 1 S. 63 (XXXI.): Zusätzliche Eisenringe für die große und kleine Kuppel</b>	<b>14</b>
<b>Zu 7.2 Teil 1 S. 67 (XXXI.): Weitere Eisenringe für Tambour und Unterbau</b>	<b>14</b>
<b>Zu 7.3 Teil 1 S. 69 (XXXIV.): Zusätzliche Streben am Hauptgesims</b>	<b>15</b>
<b>Zu 8 Teil 1 S. 73 (XXXVI.): Zusammenfassung</b>	<b>15</b>
<b>Ausblick</b>	<b>16</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>17</b>

**Zu 5.2 Teil 1 S. 41 (XX.): Konstruktive Ausbildung der Eisenketten**

Die Eisenketten werden in ihrer genauen konstruktiven Ausbildung nicht näher beschrieben, jedoch wird in [13] Tafel XI auf POLENI [10] verwiesen, der 6 Jahre nach dem Gutachten der drei Mathematiker die nachfolgende Kettenausbildung vorschlug:



Zu dieser vorstehenden Darstellung schreibt Szabo [13]:

*„...Äußerst interessant sind seine (hier ist POLENI gemeint – Ww) Überlegungen hinsichtlich der Form des Zuginnes. Da dieser ... nicht aus einem Stück hergestellt werden kann, schlägt er die Fertigung in Teilstücken ... vor, die miteinander durch die Bolzen ... verbunden sind. Er plädiert für den oberen in das Mauerwerk versenkten Einbau ..., denn: zerreißt dieser Ring etwa bei HZ, so bleibt der übrige Teil brauchbar, während der untere Ring bei einem Reißen in hz seine Funktion nicht mehr erfüllt.*

*Nach den theoretischen und experimentellen Erkenntnissen baute der Architekt VANVITELLI fünf weitere Zuginne in die Kuppel ein...“*

Es muss jedoch von uns offen gelassen werden, ob diese Ketten den bereits eingebauten ähnelten und ob die nach [13] später durch VANVITELLI eingebauten Zuginne den Vorschlägen POLENIS entsprachen. Aus [13] geht nicht hervor, wo genau die 5 neuen Zuginne in die Kuppel eingebaut wurden. Ebenso bleibt offen, ob der Hinweis Straubs [1] S. 140 und 156 korrekt ist, dass bereits mit Errichtung der Kuppel 3 Zuginne und nicht nur 2 eingebaut wurden.

Leider wertet Szabo [13] die vorstehenden Vorstellungen POLENIS nicht weiter kritisch, gegen die man 3 erhebliche Einwendungen vorbringen muss:

- (1) Jede Kuppel, die tangential Zugkräfte in ihren Breitenkreisen erzeugt, so wie die der Peterskuppel zwischen **m** und **T**, wird selbst bei passgenauem Einbau aufreißen. Der Grund liegt darin, dass die Eisenketten beim Einbau spannungslos sind und erst mit der Dehnung und dann beim Aufreißen der Kuppel die ihnen zugedachten Kräfte erhalten. Ist durch ausreichend dimensionierte und angeordnete Eisenketten das Gleichgewicht der Kräfte sichergestellt, so können die Risse in der Kuppel wieder geschlossen werden, ohne dass weitere wesentliche Rissaufweitungen mehr befürchtet werden müssen. Heute weiß man, dass man diesen Erscheinungen durch Vorspannung der Ketten – heute würde man wohl Stahlseile nehmen – vorbeugen kann. Das Stahlseil wurde allerdings erst etwa 100 Jahre nach POLENI erfunden und war deshalb keine Op-

tion. Die Vorspannung war für Wagenräder schon lange Zeit im Gebrauch, indem um das hölzerne Rad durch einen geschickten Schmied ein genau vom Umfang her abgelingter Flachstahlring in rotglühendem Zustand angepasst wurde, der durch seinen Temperaturverlust bis zur Raumtemperatur infolge seiner Längenverkürzung eine Vorspannung im Holzrad hervorrief. Allerdings muss offen bleiben, wie man diese handwerklich auf relativ kleine Bauteile beschränkte Möglichkeit auf die Dimensionen einer Kuppel anwenden wollte. Solche Diskussionen sind deshalb müßig. Übrig bleibt deshalb nur: Für solche Kuppeln sind Risse nach dem Stand der damaligen Bautechnik unvermeidlich.

- (2) Die Vorstellung POLENIS, durch einen in das Mauerwerk versenkten Einbau der Ketten – so wie in der Abbildung von ihm dargestellt - tatsächlich etwas bewirken zu können, ist gleich mehrfach anzuzweifeln. Zum einen ist zu bezweifeln, dass bei einem Kettenbruch eine Kraftübertragung an den Leibungen der Versenkungen ohne sofortigen Ausbruch übertragen werden kann. Zum zweiten hat heutiger Baustahl eine Bruchdehnung von mindestens 26 %. Setzt man wegen der völlig unbekanntem Materialeigenschaften der Eisenketten davon nur die Hälfte an, so würde bei einem Kettenglied von gegriffen 50 cm Länge an der Bruchstelle der Kette eine Dehnung von  $50 \text{ cm} * 0,13 = 6,5 \text{ cm}$  vorhanden sein müssen. Das bedeutet, dass das Steinmaterial der Kuppel ebenfalls diese Dehnung erfahren haben müsste, was nicht ohne kräftige Rissbildung im Steinmaterial der Kuppel abgehen dürfte. Letztlich heißt das nichts anderes, als dass sich zunächst in der Kuppel ein sehr kräftiger Riss ausbilden müsste, der dann zum Bruch der Kette führen könnte. Diese kräftigen Risse sind entsprechend der vorstehenden Skizze in der Gedankenwelt POLENIS nicht vorhanden.
- (3) Tritt nun tatsächlich der in der vorstehenden Abbildung dargestellte Bruch in der Kette ein und sollten die Leibungen der Versenkungen tatsächlich in der Lage sein, die Kettenkräfte aufzunehmen, so werden die beiden Bruchufer von gegeneinander wirkenden Kräften beansprucht und der ohnehin zweifelsfrei schon vorhandene Riss im Steinmaterial der Kuppel wird wesentlich verstärkt. Dadurch wird die Wirkung der Eisenketten geschwächt und schließlich annulliert. Fazit daraus ist, dass außer einer enormen Arbeit für das passgenaue Versenken der Eisenketten kein Nutzen für die Tragsicherheit der Kuppel daraus erwächst. Das Einzige, was unter den damaligen Gesichtspunkten geholfen hätte, sind ausreichend kräftige und geschickt platzierte Eisenketten. Deshalb ist das passgenaue Versenken der Eisenketten zu verwerfen.

## Zu 6.1 Teil 1 S. 51 (XXV.): Belastung

Die Massen für einzelne Teile der Kuppel wurden von den drei Mathematikern genau ermittelt, jedoch werden die angegebenen Teile und deren Massen für Basis und Tambour mit Säulenfuß durch die Rissbildungen getrennt und in der Gleichgewichtsbetrachtung der drei Mathematiker auch als Einzelteile angesetzt. Für diese Einzelteile sind die Teilmassen und angenommenen Abmessungen nicht dargestellt, so dass hier wieder eine Ungewissheit im Vergleich der Ansätze vorliegt.

Die angegebenen Gewichte lassen sich, bis auf die kleine Kuppel, einfach auf Plausibilität prüfen:

- **große Kuppel:** angenommen  $\frac{1}{2}$  - Kugel mit 97 Spannen mittlerem Radius, einer mittleren Wandstärke von 16 Spannen und dem Gewicht von Mauerwerk.  $G \approx 50 * 16 * 0,5 * f * (2 * 97)^2 * 1^{-6} \approx 47,3 \text{ Mio. Libre}$ . Das stimmt mit den angegebenen 50,1 Mio. Libre ausreichend genau überein.

- **Tambour mit attischem Säulenfuß:** Höhe 85 Spannen, Dicke 14 bis 15 Spannen, mittlerer Durchmesser 194 Spannen, mittleres Gewicht geschätzt aus 20% Travertin und 80 % Mauerwerk mit 55 Libre/Kubikspanne, abzüglich 16 Fenster von ca.12 Spannen Breite und 20 Spannen Höhe  
 $G \approx 55 * (85 * 14,5 * f * 194 - 16 * 12 * 20 * 14) * 1^{-6} \approx 38,4$  Mio. Libre. Das sind rund 10 Mio. Libre weniger als angegeben, nämlich 48,01 Mio. Libre. Da die anderen Zahlen besser übereinstimmen, könnte ein **Fehler** der drei Mathematiker vorliegen, der nur durch genauere Untersuchung zu klären ist. Diese genauere Untersuchung wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht geleistet.
- **Strebe Pfeiler:** hier sind die Bauteilabmessungen aus der Zeichnung nur schlecht abzuschätzen. Als Baustoff wird Travertin angesetzt.  
 $G \approx 16 * 72 * 63 * 17 * 10^{-6} \approx 12,3$  Mio. Libre. Das stimmt mit den angegebenen 13,3 Mio. Libre ausreichend genau überein.
- **Basis:** Höhe 40 Spannen, Breite 38 Spannen, zwei Gesimsbänder mit 7\*7 Spannen, abzüglich des Ganges mit 8\*27 Spannen, mittlerer Radius 109 Spannen, Gewicht für Mauerwerk mit 20 % Travertin.  
 $G \approx 55 * (38 * 40 + 7 * 7 - 8 * 27) * 2 * f * 109 * 1^{-6} \approx 50,9$  Mio. Libre, das stimmt mit den angegebenen 50,0 Mio. Libre gut überein.

## Zu 6.2 Teil 1 S. 53 (XXVI.): Zugkraft der Eisenketten

Mit dem Verweis auf die Zugbruchversuche von MUSSCHENBROEK wird durch die drei Mathematiker unterstellt, dass es keinerlei Unterschiede in der Zugbruchfestigkeit des Eisendrahts von MUSSCHENBROEK gegenüber den Ketten der Kuppel gebe, so dass damit die Zugbruchfestigkeit der bereits seit über 100 Jahren in die Kuppel von Michelangelo eingebauten Eisenketten mit derjenigen des von MUSSCHENBROEK untersuchten Eisendrahtes gleichgesetzt wird.

Aus heutiger Sicht ist das eine nicht zu akzeptierende Gleichsetzung, wobei man auch heute das Problem hätte, wie man denn die Festigkeitseigenschaften der eingebauten Eisenketten bestimmen sollte. Bei einem Ausbau ohne weitere Sicherungsmaßnahmen würde man den Einsturz riskieren. Aus diesem Grund muss man diesen Festigkeitsansatz als Schätzung mit nicht eingrenzbarer Schwankungsbreite charakterisieren.

Dabei wäre als weiteres wesentliches Problem auch noch der Einfluss von statistischen Überlegungen als wahrscheinlichkeitstheoretische Prognoseaussagen einzubeziehen, die mit diesen Bemerkungen noch nicht einmal ansatzweise berücksichtigt wurden. Auch bei den nachfolgenden Bewertungen werden solche Überlegungen nicht weitergeführt, weil es nicht darum geht, die gesamte Berechnung der drei Mathematiker grundlegend zu reformieren, sondern das Spannungsfeld der gewählten Ansätze aus heutiger Sicht aufzuzeigen.

Ein drittes Problem eröffnet sich hierbei im Ansatz der Zugbruchfestigkeit, die vom heutigen Sicherheitskonzept des Stahlbaus völlig abweicht, da nicht gegen die Bruch-, sondern gegen die Streckgrenze (bei heutigem Baustahl grob gerundet etwa 2/3 der Bruchgrenze) abgesichert wird. Dabei sind auch noch keine Aspekte heutiger Sicherheitsphilosophie berücksichtigt.

Die in diesem Abschnitt der „ersten Statik“ dargestellten Umrechnungen der drei Mathematiker sind verwirrend und nicht eindeutig nachvollziehbar. Das betrifft insbesondere die Umrechnung vom Rheinischen Fuß in die Römische Spanne (Palmo), da die tatsächlich vorgenommene Einteilung des Rheinischen Fußes in Zoll von den drei Mathematikern nicht angegeben wird. Deshalb unterscheiden sich die nachfolgenden beiden Vergleichsrechnungen im

Ansatz darin, dass zum einen der Rheinische Fuß (= Rheinländische Fuß) in einer Unterteilung mit 12 Zoll und zum anderen mit 10 Zoll angesetzt wird:

- a) Nach den vorgenommenen Recherchen [8], [9] wäre es korrekt, den Rheinischen Fuß in 12 Zoll zu unterteilen, was nachfolgende Berechnung ergibt:

$$\frac{1\text{Fuß}}{1218} \equiv \frac{1\text{Palmo}}{886} \equiv \frac{12\text{Zoll}}{1218} \equiv \frac{12\text{Once}}{886}$$

$$\Rightarrow 1/10 \text{ Zoll} = \frac{121,8\text{Once}}{886} = \mathbf{0,13747 \text{ Once}}$$

Ein Draht mit einem Durchmesser von einem Zehntel Zoll hat eine Fläche von

$$A_{\text{Draht}} = \frac{\Pi}{4} * (0,13747 \text{ Once})^2 = 0,0148428 \text{ Once}^2$$

Damit beträgt die Ringkraft mit einer Fläche von 12 Once<sup>2</sup>:

$$F = 600 \frac{12}{0,0148428} = 485.082 \text{ Libre} > 336.863 \text{ Libre (gemäß Angabe im Text)}$$

- b) Nimmt man nunmehr den Rheinischen Fuß in 10 Zoll unterteilt an, so ergibt sich analog

$$\frac{10\text{Zoll}}{1218} \equiv \frac{12\text{Once}}{886}$$

$$\Rightarrow 1/10 \text{ Zoll} = \frac{121,8 * 1,2\text{Once}}{886} = \mathbf{0,164966 \text{ Once}}$$

Ein Draht mit einem Durchmesser von einem Zehntel Zoll hat eine Fläche von

$$A_{\text{Draht}} = \frac{\Pi}{4} * (0,164966 \text{ Once})^2 = 0,0213737 \text{ Once}^2$$

Damit beträgt die Ringkraft mit einer Fläche von 12 Once<sup>2</sup>:

$$F = 600 \frac{12}{0,0213737} = 336.863 \text{ Libre} = 336.863 \text{ Libre (gemäß Angabe im Text)}$$

## Auswertung der Vergleichsrechnungen:

Aus den vorstehenden Vergleichsrechnungen ist abzuleiten, dass zwar mit der unter b) getroffenen Annahme in hervorragender Übereinstimmung die numerisch gleiche Zahlenangabe wie im Gutachten der drei Mathematiker erreicht wird, jedoch die Umrechnungsannahme unter b) wegen der fehlerhaften Einteilung des Rheinischen Fußes in 10 Zoll falsch ist. Der Rheinische Fuß ist richtig in 12 Zoll zu unterteilen.

Aus der Literatur [8], [9] (aber auch noch andere wie beispielsweise Meyers Neues Lexikon von 1974) ist nicht erkennbar, dass es auch noch eine andere Umrechnung mit 10 Zoll für den Rheinischen Fuß gegeben haben könnte, so dass keine Interpretation eine Alternative bietet, nicht auf einen Umrechnungsfehler der drei Mathematiker zu schließen. Deshalb ist zu schlussfolgern, dass die vorgenommene Umrechnung der drei Mathematiker nicht korrekt ist.

⇒ Ermittlung der Zugbruchfestigkeit des Eisendrahtes mit dem korrekten Ansatz nach a):

$$A = \frac{\pi}{4} * 0,13747^2 = 0,0148428 \text{ Once}^2 = 0,0148428 * (18,6 \text{ mm})^2 = 5,14 \text{ mm}^2$$

$$F = 600 \text{ Libre} \equiv 600 * 339,15 \cdot 10^{-2} = 2035 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{Bruch}} = \frac{2035}{5,14} = 396 \text{ N/mm}^2$$

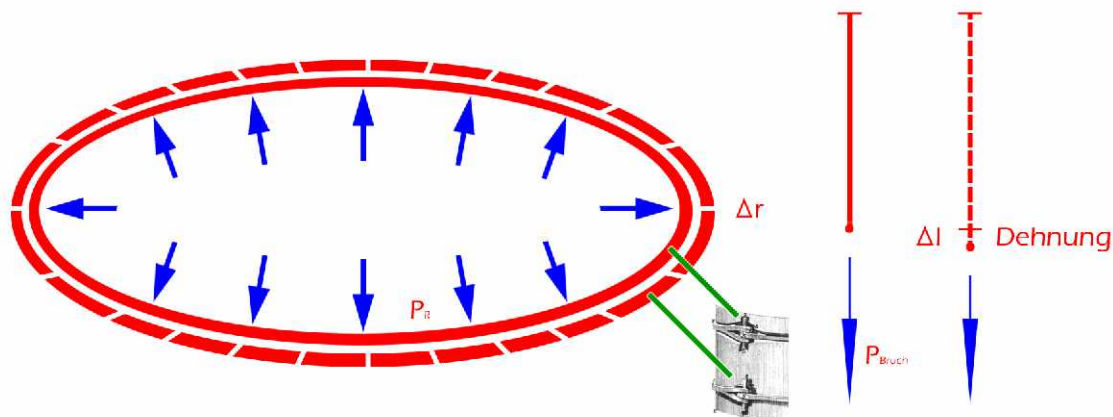
Diese Spannung von 396 N/mm<sup>2</sup> wird nach den vorstehenden Umrechnungen nach a) als Zugbruchspannung des Eisendrahtes im Experiment von MUSSCHENBROEK erreicht. Das entspricht quasi der Zugbruchspannung unseres heutigen St 37 (S 235), deren Schwankungsbereich mit 340 bis 470 N/mm<sup>2</sup> angegeben wird. Dabei ist tendenziell in Erwägung zu ziehen, dass kleinere Materialdicken höhere Zugbruchspannungen erreichen als größere.

Ungewollt wird mit der fehlerhaften Berechnung der Kraft für die Eisenketten mit 336.863 Libre gegenüber den mit der korrekten Umrechnung ermittelten 485.082 Libre eine zusätzliche Sicherheitsreserve von rund

$$\left(1 - \frac{336.863}{485.082}\right) * 100 \approx 30 \%$$

gegenüber der Zugbruchkraft erzeugt, was mit  $0,7 * 396 \text{ N/mm}^2 = 277 \text{ N/mm}^2$  ungefähr der Fließspannung des Eisens entsprechen könnte. Mit diesem Umrechnungsfehler der drei Mathematiker könnte man davon sprechen, dass quasi eine Absicherung gegenüber der Fließspannung des Eisens erfolgte, so wie es im heutigen Sicherheitskonzept vorgesehen ist.

## Zu 6.3 Teil 1 S. 53 (XXVI.): Vergleich Kreis mit Stab



$$p_R = \frac{P_{\text{Kreis}}}{U} \Rightarrow P_{\text{Kreis}} = U * p_R$$

$$U * p_R * \Delta r \equiv P_{\text{Bruch}} * \Delta l = P_{\text{Bruch}} * \Delta U = P_{\text{Bruch}} * 2 \pi \Delta r$$

$$\Rightarrow U * p_R = \frac{P_{\text{Bruch}} * 2\pi * \Delta r}{\Delta r}$$

$$\Rightarrow P_{\text{Kreis}} = P_{\text{Bruch}} * 2 \pi$$

Ohne Kenntnis der Elastizitätstheorie (und den Gesetzen der Hydrostatik) wird über eine virtuelle Verschiebung die Bruchkraft im Kettenring für eine Last, die gleichmäßig nach außen wirkt, hergeleitet.

### Zu 6.4: Teil 1 S. 55 (XXVII.): Virtuelle Verrückungen

Die in der Abbildung 5 des Originals dargestellte Prinzipskizze ist keinem der tatsächlich zum Ansatz gebrachten Berechnungen direkt zuordenbar. Mit dieser Skizze wird deshalb tatsächlich nur das Prinzip ohne weitere Spezifikationen beschrieben.

Das Prinzip, nach dem die Berechnung erfolgte, wurde von den drei Mathematikern erklärt, die Zahlenrechnung und die hierzu notwendigen Ansätze jedoch nicht offengelegt. Jeder, der diese Berechnung nachvollziehen möchte, hat damit das Problem, in die Kuppelgeometrie ein System hineinzulegen, das den ursprünglich getroffenen Annahmen zumindest näherungsweise entsprechen muss, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten.

Die zeichnerische Darstellung der Kuppel ist nach den damaligen Gepflogenheiten sicher mit hoher Genauigkeit und Detailtreue erfolgt, jedoch ohne Maßangaben. Im Text sind die Hauptabmessungen beschrieben, so dass einige Abmessungen zu Kontrollzwecken in die Schnittzeichnung eingetragen werden können. Die Lage der Zugringe als Eisenketten ist zwar beschrieben, aber nicht dargestellt und damit nur ungenau nachzuvollziehen.

Die prinzipielle Vorgehensweise der drei Mathematiker für die Rechnung ist in [1] S. 158 mit den heute in der technischen Mechanik üblichen Begriffen erläutert, indem es dort heißt:

*„Im Einzelnen ist der Gang der Rechnung also ungefähr der folgende: Das Gewicht der Laterne und der Kuppel übt auf den Kämpfering einen totalen, auf den ganzen*

*Umfang verteilten Schub  $H = \sum_{(i)} G_i \frac{v_i}{h_i}$  aus, wenn mit  $G_i$  die Gewichte ( $i = 1, 2, \dots$ ) und*

*mit  $v_i/h_i$  für die einzelnen Massen (Laterne und Kuppel) das Verhältnis der Senkung  $v_i$  des jeweiligen Schwerpunktes zur entsprechenden Horizontalverschiebung  $h_i$  des Kämpfers bezeichnet werden. Der dem Schub  $H$  entgegenwirkende Widerstand  $W$  setzt sich zusammen einerseits aus dem aus analoge Weise ermittelten Widerstand der Massen des Tambours und der Strebepfeiler gegen Kippen, andererseits aus dem Widerstand der vorhandenen Eisenringe; er wird aus ihrem Querschnitt und der dem Werk von MUSSCHENBROEK ... entnommenen Bruchfestigkeit des Eisens ... berechnet. Dabei werden die Höhenlage der Ringe und die Beziehung zwischen dem Radialdruck  $p_r$  und der Längszugkraft  $Z$  im Ring berücksichtigt ( $Z = p_r = H / 2 \Pi$ ). Als Fehlbetrag an Horizontalwiderstand auf Kämpferhöhe werden 3 237 356 römische Pfund (etwa 1100 t) ermittelt...“*

### Zu 6.5: Teil 1 S. 57 (XXVIII.): Einfachheit der Zahlenrechnung

Über die Zeit nach der „ersten Statik“ wird beispielsweise in [1] S. 161 ff und [14] S. 46 ff darüber berichtet, dass es einen Jahrhunderte langen Streit darüber gegeben habe, ob man die Mathematik (hier sind die mechanischen und statischen Prinzipien gemeint) auf reale Tragwerke anwenden dürfe. Die drei Mathematiker haben daran nicht wenig Schuld, denn hätten sie sich nicht entschlossen, die Zahlenrechnung als „einfach“ abzutun, so wäre aus dem ausgeführten praktischen Beispiel auch das für die Beurteilung so notwendige Verständnis entsprungen.

Diese Chance wurde leider vertan, denn selbst wenn man in den folgenden Jahrzehnten tatsächlich einige Fehler in der Berechnung herausgefunden hätte, so hätte das viel mehr zur Diskussion im Detail beigetragen als zu der Grundsatzdiskussion, die Anwendung der mechanischen und statischen Prinzipien abzulehnen.

Es gehört Mut und Ehrlichkeit dazu, die Spuren der erzielten Ergebnisse nicht zu verwischen, sondern so ausführlich wie notwendig darzustellen, um sie nachvollziehbar zu gestalten.

ten. Derjenige, der um das Verstehen ringt und noch nicht verstanden hat, wird diese Offenheit dankbar entgegen nehmen. Sie ihm aber mit der Begründung zu verweigern, dass das es ja „*mühe*los“ herzuleiten sei und man deshalb darauf verzichten könne, kann nur als Ausrede oder als Überheblichkeit gebrandmarkt werden.

Um das zu verdeutlichen: Vor vielen Jahren suchte ich beim Lesen eines Aufsatzes, der die wesentlichsten Ergebnisse einer Dissertation widerspiegelte, die Lösung einer Differentialgleichung nachzuvollziehen. Der Autor schrieb nämlich, nach dem Ansatz für die Differentialgleichung nur kurz: „*Wie man leicht sieht, ist das Ergebnis folgendes...*“ Ich war tatsächlich auf diese Formulierung hereingefallen, denn ich hatte später viele Stunden gebraucht und eine Menge Papier beschrieben, um vom Ansatz auf das Ergebnis zu kommen. Ich begann an mir zu zweifeln. Erst dann begriff ich, dass es da jemand wohl nicht ganz ernst gemeint haben konnte oder derjenige vollkommen überheblich war, sofern mein Selbstbewusstsein ausreicht, mich nicht für vollkommen unfähig zur „*leichten*“ Problemlösung zu halten.

Ohne dieses Beispiel weiter zu strapazieren, soll daran jedoch verdeutlicht werden, dass es nichts schädlicheres gibt, als den nachfolgenden Generationen die Nachvollziehbarkeit zu verweigern. Natürlich gibt es immer unterschiedliche Grade der Nachvollziehbarkeit, wie man schon vorstehend an der Diskussion um die Anzahl der Zolleinteilungen des Rheinischen Fußes sieht. Das war noch rekonstruierbar, weil es nicht so sehr viele Möglichkeiten gibt. Wenn eine Modellbildung und die Rechenbarkeit dieses Modells aber eine ganze Armada von Interpretationsmöglichkeiten (und möglicherweise auch von Interpretationsirrtümern der Altmeister) offen lässt, dann ist es mit der Rekonstruierbarkeit der erzielten Ergebnisse schlecht bestellt. Wie nachfolgend noch gezeigt wird, trifft eben das im vorliegenden Fall zu.

Dabei ist natürlich nicht auszuschließen, dass eine Interpretationsmöglichkeit übersehen wurde, die nur durch angepasste Veränderung der zahlreichen Variablen – sprich durch Probieren – herausgefunden werden kann, aber möglicherweise auch mit dieser Arbeit nicht herausgefunden wurde.

## **Zu 6.6 Teil 1 S. 57 (XXVIII.): Darstellung von 2 Berechnungsvarianten: Ohne und mit Schäden**

Die dann ausgeführte Berechnung wird von den drei Mathematikern für zwei Systeme durchgeführt:

1. Einmal für ein System ohne vertikale Rissbildungen in Basis, Tambour und Strebepfeilern. Der Unterbau wird als ganzer Block aufgefasst. Der daraus errechnete Widerstand hätte nach Ansicht der drei Mathematiker gereicht, wenn die Rissbildungen nicht erfolgt wären.
2. Die andere Berechnung ist für das System durchgeführt, in dem die Strebepfeiler vom Tambour und der äußere Teil der Basis vom inneren Teil durch die vertikalen Risse getrennt sind und mit dem der damals eingetretene Zustand der Kuppel beschrieben wird.

Der Modellbildung und Berechnung beider Systeme liegen gemeinsam Überlegungen zugrunde, deren Systematik in den nachfolgenden Berechnungsschritten geordnet wurden:

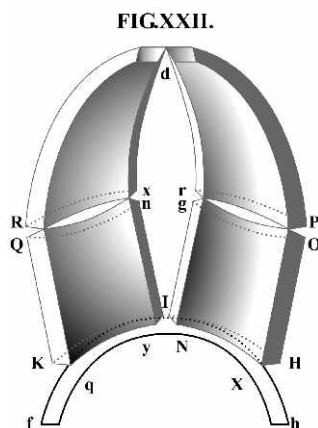
- (1) Die vorgefundenen Rissbildungen werden als das Ergebnis von Bewegungen der Kuppelteile interpretiert, die nur dann möglich sind, wenn das Gesamtbauwerk sich sozusagen in einzelne Scheiben auflöst. Dieser Gedankenansatz ist der zentrale Ausgangspunkt und die wesentlichste Leistung der drei Mathematiker, um überhaupt zu einem rechenbaren Modell zu kommen. Der Vergleich mit einer – halben – Apfelsine ist angebracht, wobei innere und äußere Schale der Kuppel verbunden durch die innere Ver-



steifungsrippe als eine Einheit idealisiert werden. Das ist sozusagen die Apfelsinenscheibe, so dass die Kuppelschale mit der Idealisierung nicht mehr zweischalig, sondern nur noch **einschalig** ist. Um zu einem rechenbaren „System“ zu kommen, ist aber noch wie selbstverständlich ein weiterer Schritt notwendig: Das Standsicherheitsproblem der symmetrischen, **räumlichen** Schale wird damit zum **ebenen** also zweidimensionalen Problem, wobei der Bruchwiderstand der Ketten vorher über die Betrachtung des gezogenen Stahlringes für das ebene Problem aufbereitet wurde.

- (2) Für die Verdrehung und Verschiebung der einzelnen, als starr angesetzten Teile der Kuppel werden ideale, reibungsfreie Gelenke angenommen. So wird eine kinematische Kette gebildet.  
Die Teile der kinematischen Kette sind in den Abbildungen 2 bis 5 des Originals der „ersten Statik“ dargestellt
- (3) Mit dieser kinematischen Kette werden die Verhältnisse der Verschiebungswege in den Gewichtsschwerpunkt der Einzelteile als virtuelle Verschiebung errechnet. Wirkt die Verschiebung in Richtung des Gewichts, so wird das Produkt Gewicht \* virtuelle Verschiebung als Belastung. Im Falle der entgegengesetzten Richtung (also entgegen der Gewichtsrichtung) wird das Produkt aus Gewicht \* virtueller Verschiebung als Widerstand angesetzt.
- (4) Als Bezugsgröße für den Widerstand wird – vermutlich – der Punkt **H** oder der Kämpfer der Hauptkuppel in den Skizzen angenommen. Die Relationen der Wege lassen sich dann z. B. unter der Annahme berechnen, dass die Horizontalkomponente der virtuellen Bewegung in **H** mit **1** angesetzt wird.
- (5) Durch diese Modellbildung in einem gedachten Bruchzustand werden alle Tragsicherheitsreserven des räumlichen Systems, wie Ringzugkräfte im Mauerwerk, Reibungskräfte in den Rissen und den nicht ideal wirkenden Gelenken vernachlässigt.

Unabhängig von den vorstehenden Erläuterungen soll nur zur Klarstellung noch auf folgenden Sachverhalt hingewiesen werden:



Die nebenstehende räumliche Idealisierung der Kuppel als oberes und dem Tambour/Strebepfeiler als unteres Teil nach POLENI 1748 [10] wird in verschiedenen Literaturstellen meist kommentarlos gezeigt. Es ist das Apfelsinenscheibenmodell vor der Überführung von der räumlichen in die zweidimensionale Idealisierung als nächsten nicht dargestellten Schritt. Der Fehler dieser Idealisierung liegt in erster Linie darin, dass im oberen Kuppelbereich tatsächlich tangentielle Druckkräfte in den Breitenkreisen vorhanden sind und damit durchgehende Risse vom Kämpfer bis zum Scheitel nicht auftreten. Damit liegt dieses Modell bereits a priori auf der sicheren Seite bzw. liefert ansatzbedingt zu ungünstige Ergebnisse.

## Zu 6.7 Teil 1 S. 57 (XXVIII.): Berechnungsvariante ohne Schäden (Hypothese); (siehe auch Skizze 1)

Um überhaupt einen nachvollziehbaren Ansatz für das System zu finden, wurden in der nachfolgenden Tabelle aus den im Original angegebenen numerischen Ergebnissen die virtuellen Verschiebungsgrößen rückgerechnet.

Die von den drei Mathematikern angesetzte Größe der virtuellen Verschiebung lässt sich aus dem Verhältnis des angesetzten Widerstands zur Bruchkraft der Ringe und dem Verhältnis des Widerstands bzw. der Last der Teile zu deren Gewicht ermitteln.

Bauteil	Gewicht oder Bruchkraft in Libre	angesetzte Last oder Widerstand in Libre	Rückschluss: Größe der virtuellen Verschiebung
<i>oberer Ring</i>	2.116.571	1.278.638	0,6041
<i>unterer Ring</i>	1.763.809	1.396.280	0,7916
kleine Kuppel	4.081.461	1.853.835	0,4541
Kuppel mit Rippen	hier nicht angesetzt	-	-
Tambour mit Säulenfuß*	48.013.750	-	-
Strebepeiler*	13.342.081	-	-
Basis*	50.087.359	-	-
<i>Summe der Teile*</i>	111.443.190	18.373.475	0,1648

Anmerkung: Widerstände sind *kursiv* geschrieben

Ein System, das etwa diese Verhältnisse angenähert darstellt, ist in der **Skizze 1** dieses Kommentars (nicht zu verwechseln mit der Skizze aus dem Original) auf dem Hintergrund der Kuppel eingetragen. Hiermit ist auch der Hinweis zu verstehen, dass das Eigengewicht der großen Kuppel angehoben wird und damit einen Beitrag zum Widerstand liefern würde.

**Die virtuellen Verschiebungen haben die gleiche Größenordnung wie die sich aus der Rückrechnung ergebenden, so dass für diese Berechnungsvariante ohne Schäden – aber natürlich basierend auf der grundlegenden Idealisierung der „Apfelsinenstücken“ – eine – naja - zufriedenstellende Rekonstruktion gelungen ist.**

### Zu 6.8 Teil 1 S. 59 (XXIX.): Berechnungsvariante mit Schäden (siehe auch Skizze 2)

In dieser Variante werden noch einige „Kunstkniffe“ in die Berechnung eingeführt, siehe Seite XXIX unten. Der Ansatz des gehaltenen, unteren Gelenkpunktes der kinematischen Kette an der Vorderseite des äußeren Teiles der Basis (am Punkt **A**) ergibt eine geringe Aufwärtsbewegung des Punktes **H** und damit müsste der Widerstand um einen Anteil aus der Last der Kuppel vergrößert werden. Das halten die drei Mathematiker nicht für möglich und schließen es damit aus. Eine Begründung dafür geben sie nicht an, sondern:

*„Wir glauben, dass wir nicht weit von der Wahrheit entfernt sind...“*

Kaum noch nachzuvollziehen ist die Lage der Gelenkpunkte der kinematischen Kette für die unteren Teile. Bei einer Lage an der Kante des jeweiligen Teiles ergeben sich zu große Widerstände. Vielleicht ist der Gelenkpunkt etwas nach innen verschoben worden?

Ein weiterer Hinweis ist mit dem Bezug auf den Punkt **a** am unteren Fensterpfosten, der als Ursprung der Verschiebungen angesehen wird. Durch mehrfaches Probieren und Abschät-

zen der angesetzten Teilgewichte wurde das in der **Skizze 2** dargestellte System gefunden, mit dem sich etwa die Größe der Lasten und Widerstände erklären lässt. Wie weit es allerdings dem System der drei Mathematiker nahe kommt, wird wohl keiner nachvollziehen können.

Vollkommen unklar ist, wieso in dem zweiten System mit dem höheren Lastansatz für die kleine Kuppel, die Bruchkraft der Ringe aus dem ersten System beibehalten wurde.

Die angegebenen Teilgewichte sind über die beschriebenen Abgrenzungen wie folgt und in Anlehnung an das oben mit der Plausibilitätsprüfung angewendete einfache Näherungsverfahren ermittelt:

äußerer Teil der Basis:

$$55 * (14 * 40 - 4 * 27 + 0,5 * 7 * 7) * 2 * f * 119 = 19.595.322 \text{ Libre}$$

Pfeileraufsatz (Säulenfuß):

$$55 * 22 * 15 * f * 194 = 11.061.861 \text{ Libre}$$

gelöster Tambour:

$$55 * (51 * 14,5 * f * 194 - 16 * 12 * 20 * 14) = 21.831.822 \text{ Libre.}$$

Bauteil	Masse oder Bruchkraft in Libre	angesetzte Last oder Widerstand in Libre	Rückschluss: Größe der virtuellen Verschiebung
kleine Kuppel	4.081.461	2.961.060	0,7255
Kuppel mit Rippen	50.138.000	6.412.590	0,1279
<b>Summe der Lasten</b>		<b>ca. 9,37 Mio.</b>	
<i>Pfeileraufsatz / Säulenfuß *</i>	11.061.861	867.444	0,0784
<i>gelöster Tambour *</i>	21.831.822	1.266.690	0,0580
<i>Strebe Pfeiler *</i>	13.342.081	574.555	0,0431
<i>äußerer Teil der Basis *</i>	19.595.322	752.686	0,0384
<i>oberer Ring</i>	2.116.571	1.278.638	0,6041
<i>unterer Ring</i>	1.763.809	1.396.280	0,7916
<b>Summe der Widerstände</b>		<b>ca. 6,14 Mio.</b>	

Mit diesen Zahlen kann nur noch probiert werden, ob ein gewähltes System etwa diese Größe der virtuellen Verschiebungen ergibt. Wird das System 2 angesetzt, dann ergeben sich bei Randlage der Gelenkpunkte für die einzelnen Teilgewichte zu hohe Widerstände. Es erscheint deshalb möglich, dass die jeweiligen Drehpunkte nach innen geschoben wurden. Wenn für ein Rechteck die Schiefstellung und das Anheben des Schwerpunktes bekannt sind, so lässt sich der Drehpunkt berechnen. Das wurde hier getan. Danach müssten die Drehpunkte wie folgt liegen:

Pfeileraufsatz / Säulenfuß

0,12 \* Breite

entspricht 1,8 Spannen

gelöster Tambour	0,20 * Breite	entspricht 2,8 Spannen
Strebepfeiler	0,13 * Breite	entspricht 2,2 Spannen
äußerer Teil der Basis	0,10 * Breite	entspricht 1,4 Spannen.

Die Ergebnisse sind zu unterschiedlich, um dahinter eine Systematik zu erkennen.

Interessant ist die Lage des Schwerpunktes der großen Kuppel. Die Untersuchung wurde als ebenes System durchgeführt. Damit musste der Schwerpunkt unter Berücksichtigung der Massenverteilung über den Querschnitt der Kuppel berechnet werden. Die Masse ist abhängig vom Durchmesser in der jeweilige Höhe. Je weiter man sich der Kuppelspitze nähert, desto geringer wird die dem Punkt zugeordnete Masse. Damit ergibt sich ein relativ weit außen, am Kämpfer liegender Schwerpunkt.

Für eine Halbkugel liegt der so zugeordnete Flächenschwerpunkt bei  $R \cdot f/4$ , bei einer Halbkugel mit einer Öffnung von  $10^\circ$  Innenwinkel liegt der so zugeordnete Flächenschwerpunkt bei  $0,796 \cdot R$ .

Ohne die Kuppelgeometrie und deren Masseverteilung genauer zu kennen, ist deshalb der relativ weit außen angesetzte Schwerpunkt plausibel, der hier bei etwa  $0,84 R$  liegt.

**Im Ergebnis der versuchten Rekonstruktion des Rechenganges der drei Mathematiker ist zu konstatieren, dass es für die *Berechnungsvariante mit Schäden* praktisch nicht genau möglich ist, diese nachzuvollziehen.**

Ob hier bewusst die Darstellung des Rechenweges wegen „*Einfachheit*“ zurückgehalten wurde, damit Annahmen, die den Herren plausibel erschienen, aber nicht genauer begründet werden konnten, nicht offen gelegt werden mussten, oder ob noch andere Beweggründe vorgelegen haben, ist mit dem zur Verfügung stehendem Material nicht festzustellen.

## Zu 6.9 Teil 1 S. 61 (XXX.): Diskussion der Berechnungsergebnisse

Mit der vorliegenden Untersuchung wurde versucht, das „*System*“ der drei Mathematiker in ihren Ergebnissen nachzuvollziehen. Das ist nur für die *Berechnungsvariante ohne Schäden* (siehe Skizze 1) gelungen, weil für die *Berechnungsvariante mit Schäden* Begründungen fehlen und die aus heutiger Sicht sinnvollen Ansätze nicht zufriedenstellende Übereinstimmungen hinsichtlich einer konsequent angewendeten Systematik ergeben (siehe Skizze 2).

Akzeptiert man allerdings bereits das erkennbare Prinzip, den Drehpunkt der Bauteile nicht genau auf die Bauteilkante, sondern mehr oder weniger willkürlich in das Bauteil eingerückt zu legen, so ist die Herangehensweise der drei Mathematiker zu diesem Teilproblem tendenziell richtig. Trotz dieser richtigen Tendenz sind unter Berücksichtigung der einfach aus der *Berechnungsvariante ohne Schäden* übernommenen Kettenkräfte, sowie dem einfachen Weglassen des günstig wirkenden Einflusses der großen Kuppel auf der Widerstandsseite so viele wesentliche Ansatzkonflikte vorhanden, dass man das Ergebnis in diesem Sinne weder im Rahmen der Modellbildung und erst recht nicht gemessen an dem Maßstab der Wirklichkeitsnähe als richtig werten kann.

Um es noch einmal ganz klar herauszustellen:

Die statische Berechnung erfolgt immer in 2 wesentlichen Schritten:

Erstens in einer Modellbildung, die die Tragkonstruktion für den Statiker überhaupt erst rechenbar macht und immer eine mehr oder weniger gute Abbildung der Wirklichkeit darstellt.

Zum zweiten werden an diesem Modell Annahmen getroffen, die die Belastung und die Belastbarkeit der Wirklichkeit nachbilden.

Im vorliegenden Fall wurden von den drei Mathematikern bereits mit dem „Apfelsinenscheibenmodell“ zur Erzielung einer Rechenbarkeit bereits derart große Abweichungen von der Wirklichkeit eingeführt, dass es aus heutiger Sicht nicht einmal zur Plausibilitätskontrolle taugt. Die Art der Berechnung aus heutiger Sicht anzuwenden zu wollen, ist schlichtweg falsch. Kuppeln sind räumliche Tragwerke und müssen auch als solche behandelt werden. Das bestreiten zu wollen ist ungefähr damit vergleichbar, wenn man die Berechnung von Platten grundsätzlich auf den Einfeldträger zurückführen wollte. In einigen Fällen kann das zwar sogar sinnvoll sein und mit entsprechendem Aufwand sind solche Maßstababbildungen auch möglich, jedoch sind das immer Hilfsmittel, die sozusagen fallweise Korrekturansätze verlangen. Diese Korrekturen konnten von den drei Mathematikern nicht vorgenommen werden, weil sich das Tragwerk mit dem Kenntnisstand des Jahres 1742 nicht wirklichkeitsnäher abbilden ließ.

Im Rahmen dieses „Apfelsinenscheibenmodells“ wurden dann für die Widerstandsseite Annahmen getroffen, die zweifelsfrei zu ungünstig sind, wodurch das sehr auf der sicheren Seite liegende „Apfelsinenscheibenmodell“ tendenziell in Richtung Unterschätzung der Widerstandsseite verstärkt wurde. Damit wurde bereits mit der „ersten Statik“ der den Tragwerksplanern anhaftende Mythos des „Kaputtrechners“ oder des „10-fach Überdimensionierers“ begründet. Man muss deshalb auch leider konstatieren, dass die Berechnungsergebnisse selbst im Rahmen der Modellbildung wesentlich zu ungünstig sind und natürlich erst recht gemessen an der Wirklichkeit.

Es erübrigt sich deshalb auch die weitere Diskussion zur Kritik, dass bei dem festgestellten Standsicherheitsdefizit die Konstruktion schon längst eingestürzt sein müsste. Auch heute noch und sehr häufig bei Sanierungen entziehen sich diverse Konstruktionen einer wirklichkeitsnahen Tragwerksanalyse, weil wir auch heute noch nicht in der Lage sind, ohne erhebliche Eingriffe am Tragwerk die für die Tragwerksanalyse erforderlichen Geometrie- und Festigkeitsparameter zu erkunden. Dabei spielen Aufwands- und Nutzensüberlegungen die entscheidende Rolle. Auch in diesen Fällen kann es durchaus zu solchen Ergebnissen der Tragwerksanalyse kommen, dass im Rahmen der Annahmen erhebliche Standsicherheitsdefizite festgestellt werden müssen. Es ist dann die Aufgabe der Tragwerksplaner, Modell- und Annahmefehler zu diskutieren und hinsichtlich ihres Einflusses auf die Standsicherheitsbetrachtungen zu bewerten.

**Es ist einzuschätzen, dass die drei Mathematiker diese Diskussion für ihr gewähltes Modell nicht führen konnten, weil sie an die ingenieurtheoretische Grenze stießen. Anders dagegen bei ihren Annahmen zu Widerstand und Belastung des Modells. Hier haben sie eine Parameterdiskussion, trotz des alarmierenden Ergebnisses, unterlassen. Gepaart mit solch selbstbewusst-optimistischen Bemerkungen, dass man glaube, „nicht weit von der Wahrheit entfernt“ zu sein, liegt darin der größte Mangel der ersten statischen Berechnung.**

## Zu 7 Teil 1 S. 63 (XXXI.): Instandsetzungsvorschläge

Im Ergebnis der Wertungen des vorherigen Abschnittes, sind auch die vorgeschlagenen Instandsetzungsvorschläge kritisch zu betrachten.

Im unteren Bereich der Kuppel treten Ringzugkräfte auf, die von dem Mauerwerk nicht aufgenommen werden konnten und mit zu den vertikalen Rissen und den weiteren, von den drei Mathematikern beschriebenen Schäden, geführt haben. Außerdem ist die Festigkeit des Schalenmauerwerks von Tambour und Basis einer kritischen Bewertung zu unterziehen. Ist

durch das schlechte Mauerwerk im Inneren der Wände möglicherweise die Rissbildung wegen Versagen der Scherfestigkeit erfolgt? Gleiches könnte für die dünnen Wände der Strebeböcher gelten. Diese Grundlagenuntersuchung ist auch mit heutigen Möglichkeiten nebenbei nicht zu machen.

## Zu 7.1 Teil 1 S. 63 (XXXI.): Zusätzliche Eisenringe für die große und kleine Kuppel

Die vorgeschlagenen Verstärkungen sollen noch kurz in der Wirkung eingeschätzt werden. Zu den Materialfestigkeiten sind uns keine Werte bekannt. Die Verstärkungen können deshalb nicht mit unter dem Gesichtspunkt des örtlichen Materialversagens, sondern nur unter näherungsweise Berücksichtigung der Schalentheorie (angenähert als Kugelschale) eingeschätzt werden.

Es ist eine wirksame Maßnahme, im Bereich der Ringzugkräfte der großen Kuppel einen Zugring herzustellen, auch wenn er nicht vorgespannt ist und deshalb erst bei weiteren Ausdehnungen der Kuppel Kräfte erhält.

Die Ringe für die kleine Kuppel sind unwirksam, da hier oben in den Schalen der großen Kuppel Druckkräfte in Richtung der Längen- und Breitenkreise wirken. Wie ein Zugring von Innen im Mauerwerk verankert werden soll, wurde nicht bedacht.

Der Ring in Höhe **T** ist in der Wirkung zweifelhaft, da hier die Ringzugkräfte praktisch in Druckkräfte umschlagen dürften (Theorie der Kugelschale) und erkennbar an den nach oben auf Null auslaufenden vertikalen Rissbildungen. Die Begründung der drei Mathematiker für diesen Ring wird für die Rippe zwischen äußerer und innerer Schale vergleichend aus dem ebenen Problem eines Gewölbekragens zwischen **V** und **O** hergeleitet, der einen zusätzlichen Gewölbendruck erhält und deshalb im Scheitel reißt (Biegung!) und sich nach außen (oben) bewegt.

Warum sollte das passieren, die Vertikallast wird doch nicht vergrößert?!

## Zu 7.2 Teil 1 S. 67 (XXXI.): Weitere Eisenringe für Tambour und Unterbau

Die Ringe und weiteren Verstärkungen der Basis sind aus der Modellbildung mit den nach außen kippenden Teilen entwickelt. Die nach außen gerichtete Bewegung wird als Ursache angesehen und nicht als Folge des Nachgebens der Kuppel wegen Versagen gegen Ringzug. Die größte Verschiebung wird in Höhe des Hauptgesimses festgestellt.

Der Ring bei **m** ist gut wirksam, die Ringe bei **E** jedoch kaum. Die angesprochenen weiteren Ketten und Pflöcke sind mit der gedachten Wirkung nicht richtig nachvollziehbar, ebenso nicht die Ausbildung der Kette mit der *Darstellung 6*. Die Beschreibung von Kettenlagen und Richtungen ist verwirrend und ohne Kenntnis möglicherweise an anderer Stelle bereits ausgeführter Beispiele nicht rekonstruierbar.

Die gewölbten Streben sind ein typisches Bauelement zur Abtragung von Gewölbeschubkräften. Diese treten bei der gerissenen Kuppel auf und ihre Weiterleitung muss ermöglicht werden. Durch Vertikallasten wird die schräge Kraft mehr zur Senkrechten ausgerichtet. Das setzt, im Zusammenhang gesehen, wie vorher vorgeschlagen, die verstärkten Strebeböcher voraus.

## Zu 7.3 Teil 1 S. 69 (XXXIV.): Zusätzliche Streben am Hauptgesims

Die Pflöcke zwischen dem Ring bei **n** und dem Ring bei **m** würden eine Verbesserung für die Lasteinleitung bringen, also eine brauchbarer Vorschlag.

## Zu 8 Teil 1 S. 73 (XXXVI.): Zusammenfassung

Die Schäden und die erfolgten Bewegungen wurden von den drei Mathematikern gut erkannt und beschrieben. Die Verstärkungen jedoch nicht konsequent in dem Bereich der Schadensursache angeordnet, weil hier offenbar der Zusammenhang von Ursache und Wirkung nicht erkannt werden konnte, das Wissen fehlte noch. Deshalb sind Verstärkungen auch in den Bereichen von Folgeschäden vorgeschlagen worden, obwohl sie damit zum großen Teil unwirksam sind.

Der Versuch, die Berechnung nachzuvollziehen, soll nicht ohne Wertung abgeschlossen werden.

Die drei Mathematiker waren Anwender der damals bekannten mechanischen Prinzipien. Für ein Bauwerk mit deutlichen Schäden sollten Ursachen dafür gefunden und Maßnahmen vorgeschlagen werden, um einen Einsturz des Bauwerkes zu verhindern.

Es wurde ein System gesucht und gefunden, mit dem man glaubte, die Schäden erklären und Maßnahmen zur Erhaltung der Kuppel errechnen zu können.

Das Hooke'sche Gesetz über die Proportionalität von Spannungen und Dehnungen war noch nicht bekannt. Der Widerstand der Eisenringe wurde deshalb nicht in Abhängigkeit von deren wirklicher Dehnung, sondern mit der Größe deren Bruchkraft, abgemindert mit einer virtuellen Verschiebung in Höhe der Ringlage, angesetzt.

Das ist mit dem heutigen Kenntnisstand über elastisch- plastisches Materialverhalten ein grundlegender Fehler in den Voraussetzungen des gewählten Systems.

Wird für die Eisenringe, nur als Gedankenmodell aus heutiger Sicht, bis etwa 80 % der Bruchfestigkeit ein angenähert linear verlaufender E – Modul von ca. 180.000 N/mm<sup>2</sup> angenommen, so ergibt das eine Dehnung von rund 1,7 ‰ . Bei 190 Spannen Durchmesser der Ringe ist eine Dehnung von  $0,0017 * 190 * f = 1,01$  Spanne  $\approx 12$  Onzen notwendig, um die angesetzte Größe zu realisieren. Unter Nummer 32 der von den drei Mathematikern aufgezählten Schäden (siehe Teil 1 S. 19 (IX)) werden die Risse mit einer Summe von 22 bis 24 Onzen angegeben. Sollte das die Dehnung in Höhe der Eisenringe sein, dann wäre deren Fließgrenze erreicht und die Kräfte der Eisenringe etwa in der gedachten Größe aktiviert gewesen. Man muss aber auch beachten, dass ein Schlupf in den Kettengliedern aufgetreten sein wird, bevor das Eisen bis zur Fließgrenze gedehnt wird. Der grundlegende Fehler ist in der Bedeutung damit abgeschwächt.

Wie bei der Anwendung des Hebelgesetzes die Festigkeit und Unzerstörbarkeit des Hebels vorausgesetzt wird, spielen in den Überlegungen zum Kräftegleichgewicht nur die geometrischen Abhängigkeiten der Bauteile eine Rolle, nicht jedoch deren innerer Belastungszustand und Festigkeit.

Für Gebilde aus starren Körpern, die sich um definierte Gelenkpunkte drehen, ist zur Berechnung der Kippsicherheit (Standicherheit) die gewählte Vorgehensweise mit virtuellen Verschiebungen möglich, wenn keine elastische Größe eingeführt wird, die nur bei realen Verschiebungen geweckt wird. Es werden Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt, ohne Verträglichkeitsbedingungen zu berücksichtigen. Eine Herangehensweise, die heutzutage bei Untersuchungen im Bruchzustand angewendet wird.

Die Stützlinientheorie des Gewölbes als ebenes Problem war in den Anfängen von PHILIP DE LA HIRE entwickelt worden und ist auch mit dem Hinweis in der „ersten Statik“ aufgeführt, dass bei der Kuppel ein anderes System wirken muss, weil das Rissbild der Kuppel nicht mit dem Rissbild eines Gewölbes zu vergleichen ist. Bei der Kuppel fehlten die Horizontalrisse.

Die zweite Tragrichtung der räumlich gekrümmten, rotationssymmetrischen Kuppel, bei der auch auf den Breitenkreisen Kräfte entstehen, wird erst Ende des 19. Jahrhunderts erkannt.

Die Berechnung oder deren Ergebnis als richtig oder falsch zu werten, selbst unter der Maßgabe, das damalige Wissen als Grundlage anzusehen, geht an der Bedeutung der ersten Statik vorbei, da nicht nur das Noch-Nicht-Wissen in der Wertung zu berücksichtigen ist, sondern auch die zurückgehaltenen Informationen als nicht zu tolerierende Geheimniskrämerei und damit auch nicht offen gelegte Begründungen für die getroffenen Widerstandsannahmen.

**Die wesentlichste Bedeutung der „ersten Statik“ besteht darin, dass erstmals der Versuch gemacht wurde, sichtbare Schäden und Verformungen an einem Bauwerk mit Prinzipien der Mechanik zu erklären und mathematisch zu begründen.**

**Der wesentlichste Mangel der „ersten Statik“ besteht nicht in erster Linie in seinem von der Wirklichkeit des Jahres 1742 abweichenden numerischem Kalkül, sondern in einer nicht vorgenommenen Parameterdiskussion für die Widerstandsseite. Hier war Schweigen nicht Gold, sondern Silber.**

## Ausblick

Für diejenigen, die enttäuscht sind, dass sie keine gewaltige Computerrechnung vorgefunden haben, die sozusagen als Meilenstein der Wahrheit zur Vergleichsbasis gekürt werden kann, sollen noch folgende Überlegungen zur Kenntnis gegeben werden:

- (1) Auch mit den heutigen Möglichkeiten der Hard- und Software ist so eine Arbeit nicht mal eben nebenbei zu bewältigen, so dass man sich den Aufwand gut überlegen muss.
- (2) Es ist die grundlegende Frage der Aufgabenstellung, ob man die Standsicherheit des Jahres 1742 quasi als Vergleich modellieren will, wozu auch eine Reihe von genaueren Bauzeichnungen, die die drei Mathematiker offensichtlich hatten, erforderlich sind. Diese Unterlagen müssten beschafft werden.
- (3) Wollte man noch mehr Informationen als die drei Mathematiker für die Einschätzung des damaligen Zustandes zusammentragen, so müsste z.B. recherchiert werden, ob der Hinweis von Straub, dass nicht zwei sondern bereits 3 Eisenringen vorhanden gewesen seien, korrekt ist.
- (4) Wollte man den heutigen Zustand der Standsicherheit erkunden, so müsste man wohl die Bauakten seit 1742 lesen (in Latein und Altitalienisch), wozu man sich sicherlich an die Bibliothekia Herziana in Rom wenden kann. Ansonsten ist genau die gleiche gutachterliche Vorgehensweise notwendig wie in der „ersten Statik“ von den drei Mathematikern vom Prinzip her gezeigt.
- (5) Möglicherweise ist aber auch alles das gar nicht notwendig, weil diese Recherchen bereits gelaufen sind. Wie man beispielsweise aus dem Internet unter <http://www.source.at/beetles/neu/afrika/> erfahren kann, wurde in Afrika, in der 2 ½-Millionen-Stadt *Abidjan, Côte d'Ivoire* (früher Elfenbeinküste), der Petersdom 1:1 nachgebaut und im Jahre 1990 von Papst Johannes Paul II. unter dem Namen „*Notre Dame de la Paix*“ geweiht. Natürlich sind dazu Planungen und diverse Recherchen notwendig. Es ist sicher anzunehmen, dass man in Rom darüber Bescheid weiß. Dort



könnte man also zuerst ansetzen. Wir haben das nicht weiter recherchiert, denn uns hat in erster Linie die „erste Statik“ und erst in zweiter Linie die Kuppel des Petersdomes interessiert.

## Literaturverzeichnis

- [1] Straub, H.: Die Geschichte der Bauingenieurkunst. Ein Überblick von der Antike bis in die Neuzeit. 4., überarb. und erw. Auflage, Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verlag, 1992
- [2] Wapenhans, W.: Die historische Entwicklung von Schiffshebewerken. Wasserwirtschaft-Wassertechnik, Berlin 36(1986)5 S. 116 - 120
- [3] Wapenhans, W.: Die erste Stahlbetontheorie vor 100 Jahren und Ihr geistiger Vater Dr.-Ing. E.h. Matthias Koenen. Bauplanung-Bautechnik, Berlin 40(1986)12 S. 540 - 542
- [4] Wapenhans, W.: Zur Entwicklungsgeschichte des Stahlverbundbaus in Deutschland bis 1992. 75 Seiten, 55 Bilder. DIN A 4. Zu beziehen über: Selbstverlag W + R Wapenhans und Richter, Planungsbüro für Konstruktiven Ingenieurbau, Räcknitzhöhe 35, 01217 Dresden
- [5] Krüger, R.-H.: Friedrich-Wilhelm Diterichs - Baumeister zweier Könige. Technische Universität Dresden, Sektion Architektur 1990, 221 S., 267 Bilder.
- [6] Krüger, R.-H.: Friedrich-Wilhelm Diterichs – Architekt, Ingenieur und Baubeamter im Preußen des 18. Jahrhunderts. Potsdamer Verlagsbuchhandlung, 1. Auflage 1994, 298 S.
- [7] Wapenhans, W.: Gegenwärtiger Stand und Vorschriften des Stahlverbundbaus. Bauplanung-Bautechnik, Berlin 43(1989)11 S. 492 - 496
- [8] Kahnt, H.; Knorr, B.: BI-Lexikon Alte Maße, Münzen und Gewichte. Leipzig 1986
- [9] Noback, Ch.; Noback, F.: Vollständiges Taschenbuch der Münz-, Maas und Gewichts-Verhältnisse ..., Leipzig 1851, F.A. Brockhaus
- [10] Poleni, G.: Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano. 1748
- [11] Conrad, D.; Hänseroth, T.: Die „Geburtsstunde des modernen Bauingenieurwesens“ vor 250 Jahren und ihre Vorgeschichte. Bautechnik 70(1993)3 S.176-180
- [12] Club-Reiseführer Rom. Reise- und Verkehrsverlag, München, Stuttgart, aktualisierte Ausgabe 1997, 432 S.
- [13] Szabo, I.: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen. 3., korrigierte und erweiterte Auflage, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1996, 571 S.
- [14] Erler, U.; Schmiedel, H. u.a.: Brücken. Historisches, Konstruktion, Denkmäler. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1988, 244 S.

